Zápočtový test z MA2, varianta C **7. 12. 2017**

1. Najděte lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = xy(3 - x + y)$$

na otevřené množině

$$M : x > 0\ .$$

Řešení:
Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace:

$$f(x,y) = 3xy - x^2y + xy^2$$

$$f'(x,y) = \big(3y - 2xy + y^2,\ 3x - x^2 + 2xy\big)$$

Tedy $f'(x,y) = (0,0)$ právě když

$$y(3 - 2x + y) = 0$$

a

$$x(3 - x + 2y) = 0\ .$$

Protože $x > 0$, tak z druhé rovnice musí platit, že $3 - x + 2y = 0$. K tomu z první rovnice přidáme buď podmínku $y = 0$ nebo $3 - 2x + y = 0$. Z toho dostaneme stacionární body

$$(3,0) \quad \text{a} \quad (1,-1)\ .$$

V těchto stacionárních bodech dále vyšetříme druhou derivaci:

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} -2y & 3 - 2x + 2y \\ 3 - 2x + 2y & 2x \end{pmatrix}$$

Pro $(x,y) = (3,0)$ je

$$f''(3,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = -9 < 0$) je forma daná druhou derivaci indefinitní a tedy v daném bodě je SEDLO.

Pro $(x,y) = (1,-1)$ je

$$f''(1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 3 > 0$) je forma daná druhou derivaci pozitivně definitní a tedy v daném bodě je lokální MINIMUM.

2. Určete poloměr konvergence a sečtěte mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(n + (-2)^n\Big) x^n$$

na vnitřku oboru konvergence.

Řešení:

Poloměr konvergence: Využijeme třeba podílové kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|n+1+(-2)^{n+1}\right|}{\left|n+(-2)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} |-2| \cdot \frac{\left|\frac{n+1}{(-2)^{n+1}}+1\right|}{\left|\frac{n}{(-2)^n}+1\right|} = 2$$

Poloměr konvergence je tedy $R = \frac{1}{2}$.

Součet: Řadu rozepíšeme. Pro $|x| < \frac{1}{2}$ platí, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(n+(-2)^n\Big)x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n$$

kde jednotlivé řady sečteme takto:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n = \frac{1}{1-(-2x)} = \frac{1}{1+2x} \ .$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \ .$$

Takže

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(n+(-2)^n\Big)x^n = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1+2x}$$

pro $|x| < \frac{1}{2}$.

(Zjišťování konvergence na krajích nebylo požadováno, ale snadno je vidět, že řada na krajích diverguje).